第27卷 第5期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 5
2010年10月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0827-06

求线性矩阵方程双对称最小二乘解的变形共轭梯度法*

田小红， 张凯院

(西北工业大学应用数学系，西安 710072)

摘　要: 本文基于求线性代数方程组的共轭梯度法的思想，通过特殊的变形与近似处理，建立了求一般线性矩阵方程的双对称最小二乘解的迭代算法，并证明了迭代算法的收敛性。不考虑舍入误差时，迭代算法能够在有限步计算之后得到矩阵方程的双对称最小二乘解；选取特殊的初始矩阵时，还能够求得矩阵方程的极小范数双对称最小二乘解。同时，也能够给出指定矩阵的最佳逼近双对称矩阵。算例表明，迭代算法是有效的。

关键词: 双对称矩阵；最小二乘解；极小范数解；迭代算法；最佳逼近

分类号: **AMS**(2000) 15A24; 65F10　　**中图分类号**: O241.6　　**文献标识码**: A

1　引言

矩阵方程特殊解的计算问题在电学、结构动力学、振动理论、自动控制理论等领域都有重要应用。文献[1-6]建立了求矩阵方程 $AXB = C$ 或者 $AXB + CXD = F$ 某些特殊解的迭代方法。本文建立求一般线性矩阵方程双对称最小二乘解的变形共轭梯度法(MCG算法)。

$\mathbf{R}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 实矩阵集合，$SR^{n\times n}$ 表示 n 阶实对称矩阵集合，$A\otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的Kronecker积，定义实矩阵 A 与 B 的内积为 $[A,B]=\mathrm{trace}(A^TB)$，由此导出矩阵的Frobenius范数 $\|A\| = \sqrt{[A,A]}$，$\overline{vec}(A)$ 表示将矩阵 A 按行拉直构成的列向量，e_i 表示单位矩阵 I_n 的第 i 列。记 $S=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1)$，则有 $S^2=I_n$，$S^T=S$。

定义1　若矩阵 $X\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的元素满足

$$x_{ij}=x_{ji}=x_{n+1-j,n+1-i},\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

则称 X 为双对称矩阵。全体 n 阶双对称矩阵的集合记为 $BSR^{n\times n}$。

对于一般的线性矩阵方程

$$A_1XB_1+\cdots+A_NXB_N=C,$$

研究下面两个问题：

问题1　设 $A_i\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$B_i\in\mathbf{R}^{n\times p}\,(i=1,2,\cdots,N)$，$C\in\mathbf{R}^{m\times p}$，求 $X\in BSR^{n\times n}$ 使得

$$\Big\|\sum_{i=1}^{N}A_iXB_i-C\Big\|=\min. \tag{1}$$

问题2　给定 $\overline{X}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$S_E$ 表示问题1的解集合，求 $\hat{X}\in S_E$ 使得

$$\|\hat{X}-\overline{X}\|=\min_{X\in S_E}\|X-\overline{X}\|. \tag{2}$$

收稿日期: 2008-11-10.　**作者简介**: 田小红(1984年4月生)，女，硕士. 研究方向：计算数学.
***基金项目**: 陕西省自然科学基金(2006A05).

2 问题1的等价转化

引理1 矩阵 $X \in BSR^{n\times n}$ 的充要条件是 $X = X^T = SXS$。

引理2 若矩阵 $X \in SR^{n\times n}$，则 $X + SXS \in BSR^{n\times n}$。

为了讨论方便引进记号

$$f(X)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\big(A_i^TA_jXB_jB_i^T+B_iB_j^TXA_j^TA_i+SA_i^TA_jSXSB_jB_i^TS+SB_iB_j^TSXSA_j^TA_iS\big),$$

$$Q=\sum_{i=1}^{N}\big(A_i^TCB_i^T+B_iC^TA_i+SA_i^TCB_i^TS+SB_iC^TA_iS\big).$$

定理1 求解问题1等价于求矩阵方程

$$f(X)=Q \tag{3}$$

的双对称解，而且该矩阵方程一定有双对称解。

证明 当 $X \in BSR^{n\times n}$ 时，由引理1知 $X = X^T = SXS$。因此，求 $X \in BSR^{n\times n}$ 使得 (1) 成立，等价于求 $X \in BSR^{n\times n}$ 使得

$$\Big\|\sum_{i=1}^{N}A_iXB_i-C\Big\|^2+\Big\|\sum_{i=1}^{N}B_i^TXA_i^T-C^T\Big\|^2+\Big\|\sum_{i=1}^{N}A_iSXSB_i-C\Big\|^2+\Big\|\sum_{i=1}^{N}B_i^TSXSA_i^T-C^T\Big\|^2=\min. \tag{4}$$

下面证明求极小值问题 (4) 的双对称解等价于求矩阵方程 (3) 的双对称解。将矩阵方程组

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{N}A_iXB_i=C, & \sum\limits_{i=1}^{N}B_i^TXA_i^T=C^T,\\ \sum\limits_{i=1}^{N}A_iSXSB_i=C, & \sum\limits_{i=1}^{N}B_i^TSXSA_i^T=C^T,\end{cases} \tag{5}$$

按行拉直可得线性方程组

$$\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{N}A_i\otimes B_i^T\\ \sum\limits_{i=1}^{N}B_i^T\otimes A_i\\ \sum\limits_{i=1}^{N}(A_iS)\otimes(B_i^TS)\\ \sum\limits_{i=1}^{N}(B_i^TS)\otimes(A_iS)\end{pmatrix}\cdot\overline{vec}(X)=\begin{pmatrix}\overline{vec}(C)\\ \overline{vec}(C^T)\\ \overline{vec}(C)\\ \overline{vec}(C^T)\end{pmatrix}. \tag{6}$$

易见，求线性方程组 (6) 的最小二乘解，等价于求矩阵方程组 (5) 的最小二乘解，也就是求极小值问题 (4) 的解。记线性方程组 (6) 的系数矩阵为 V，那么

$$V^T = \Big(\sum_{i=1}^{N} A_i^T \otimes B_i, \sum_{i=1}^{N} B_i \otimes A_i^T, \sum_{i=1}^{N}(SA_i^T) \otimes (SB_i), \sum_{i=1}^{N}(SB_i) \otimes (SA_i^T) \Big).$$

引进记号

$$\begin{aligned} W = & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \big((A_i^T A_j) \otimes (B_i B_j^T) + (B_i B_j^T) \otimes (A_i^T A_j) \\ & + (SA_i^T A_j S) \otimes (SB_i B_j^T S) + (SB_i B_j^T S) \otimes (SA_i^T A_j S) \big), \end{aligned}$$

线性方程组 (6) 的正规方程组可写为

$$W \cdot \overline{vec}(X) = V^T \big((\overline{vec}(C))^T, (\overline{vec}(C^T))^T, (\overline{vec}(C))^T, (\overline{vec}(C^T))^T \big)^T, \tag{7}$$

将正规方程组 (7) 还原为矩阵方程就是矩阵方程 (3)。

下面证明矩阵方程 (3) 有双对称解。因为矩阵方程 (3) 有解，所以可设 $\tilde{X}$ 是它的一个解 (未必是双对称解)，那么

$$f(\tilde{X}) = Q, \tag{8}$$

令

$$g(\tilde{X}) = \frac{1}{4} \times \big(\tilde{X} + \tilde{X}^T + S(\tilde{X} + \tilde{X}^T)S \big),$$

由引理 2 知 $g(\tilde{X}) \in BRS^{n\times n}$，式 (8) 取转置，然后分别左、右乘 S，联立运算可得 $f(g(\tilde{X})) = Q$，这表明 $g(\tilde{X})$ 是矩阵方程 (3) 的一个双对称解。

3 求解问题 1 的变形共轭梯度法

下面建立求矩阵方程 (3) 双对称解的 MCG 算法，也就是求解问题 1 的 MCG 算法。

步骤 1 给定矩阵 $A_i \in \mathbf{R}^{m\times n}$，$B_i \in \mathbf{R}^{n\times p}\,(i = 1, 2, \cdots, N)$，$C \in \mathbf{R}^{m\times p}$，$X_0 \in BSR^{n\times n}$；

步骤 2 计算 $R_0 = Q - f(X_0)$，$G_0 = f(R_0)$，$P_0 = G_0$，输值 $k := 0$；

步骤 3 如果 $R_k = 0$，停止；否则，置 $k := k + 1$；

步骤 4 计算

$$X_k = X_{k-1} + \frac{\|R_{k-1}\|^2}{\|P_{k-1}\|^2} P_{k-1},$$

$$R_k = Q - f(X_k) = R_{k-1} - \frac{\|R_{k-1}\|^2}{\|P_{k-1}\|^2} f(P_{k-1}),$$

$$G_k = f(R_k), \quad P_k = G_k - \frac{[G_k, P_{k-1}]}{\|P_{k-1}\|^2} P_{k-1}, \quad \text{(变形之一)}$$

步骤 5 返回步骤 3。

引理 3 矩阵 $X, Y \in \mathbf{R}^{p\times p}$，则有 $[f(X), Y] = [X, f(Y)]$。

定理 2 如果 X^* 是矩阵方程 (3) 的双对称解，那么对任意初始双对称矩阵 X_0，MCG 算法中的矩阵 X_i，R_i 和 G_i 满足 $[G_i, X^* - X_i] = \|R_i\|^2\,(i = 0, 1, 2, \cdots)$。

证明 因为 X^* 是矩阵方程 (3) 的双对称解，所以 $f(X^*) = Q$，当 $i = 0, 1, 2, \cdots$ 时，有

$$\begin{aligned}[G_i,\, X^* - X_i] &= \big[f(R_i),\, X^* - X_i\big] = \big[R_i,\, f(X^* - X_i)\big] \\ &= \big[R_i,\, f(X^*) - f(X_i)\big] = \big[R_i,\, Q - f(X_i)\big] = [R_i,\, R_i] = \|R_i\|^2.\end{aligned}$$

定理3 如果 X^* 是矩阵方程 (3) 的双对称解，那么对任意初始双对称矩阵 X_0，MCG 算法中 X_i, R_i 和 P_i 满足 $[P_i,\, X^* - X_i] = \|R_i\|^2\,(i = 0, 1, 2, \cdots)$。

利用定理2采用数学归纳法即可证得结论。

推论1 对 MCG 算法中的矩阵 R_i 和 P_i，若 $R_i \neq 0$，则 $P_i \neq 0\,(i = 0, 1, 2, \cdots)$。

定理4 对 MCG 算法中的矩阵 R_i 和 P_i，若有正数 k，使得 $R_i \neq 0(i = 0, 1, \cdots, k)$，则 $[R_i,\, R_j] = 0$, $[P_i,\, P_j] = 0\,(i \neq j;\, i, j = 0, 1, \cdots, k)$。

证明 根据矩阵内积运算的交换律，只需对 $0 \leq i < j \leq k$ 证明结论成立即可。

步骤1 采用数学归纳法证明 $[R_i,\, R_{i+1}] = 0$, $[P_i,\, P_{i+1}] = 0\,(i = 0, 1, \cdots, k)$;

步骤2 假设当 $0 \leq i \leq k$, $1 < l < k$ 时，$[R_i,\, R_{i+l}] = 0$, $[P_i, P_{i+l}] = 0$ 成立，证明 $[R_i,\, R_{i+l+1}] = 0$, $[P_i,\, P_{i+l+1}] = 0$。详细过程略。

定理5 对任意初始双对称矩阵 X_0，矩阵方程 (3) 的双对称解可在有限步计算后得到。

这是因为在有限维矩阵空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中，R_0, R_1, R_2, $\cdots$ 两两正交，所以必定存在正整数 $k \leq n^2$，使得 $R_k = 0$。由于实际计算过程中不可避免的舍入误差影响，MCG 算法并不能在有限步迭代计算后得到问题1的精确解，所以只能把它作为迭代算法使用。

引理4[7] 设 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$，线性方程组 $Ax = b$ 有解，则极小范数解 x^* 唯一，且 $x^* = A^+b \in R(A^T)$，而在 $R(A^T)$ 中只有 $Ax = b$ 的一个解。这里 A^+ 表示 A 的 Moore-Penrose 逆。

定理6 矩阵方程 (3) 总是有双对称解的，若选取初始双对称矩阵

$$X_0 = f(H), \quad H \in BSR^{n\times n}, \tag{9}$$

则 MCG 算法可在有限步计算后得到矩阵方程 (3) 的极小范数双对称解。

证明 将矩阵方程 (3) 按行拉直可得线性方程组

$$W \cdot \overline{vec}(X) = \overline{vec}(Q), \tag{10}$$

按照式 (9) 选取初始双对称矩阵 X_0 时，由 MCG 算法得到的矩阵 X_k 具有类似于 X_0 的表示形式 (对应的 H 不同)，即有 $Y_k \in BSR^{n\times n}$，使得 $X_k = f(Y_k)$。易见

$$\overline{vec}(X_k) = W \cdot \overline{vec}(Y_k) \in R(W) = R(W^T),$$

由定理5知，存在 k_0 使得矩阵方程 (3) 的双对称解 $X^* = X_{k_0}$，从而 $\overline{vec}(X^*)$ 是线性方程组 (10) 的解。由 $\overline{vec}(X^*) = \overline{vec}(X_{k_0}) \in R(W^T)$ 及引理4可得 $\overline{vec}(X^*) = W^+ \cdot \overline{vec}(Q)$ 是线性方程组 (10) 的极小范数解，从而 X^* 是矩阵方程 (3) 的极小范数双对称解。

4 问题2的等价转化

对任意给定的矩阵 $\bar{X} \in \mathbf{R}^{n\times n}$，问题1的解集合 S_E 非空，若 $X \in S_E \subset BSR^{n\times n}$，根据对称矩阵与反对称矩阵的正交性，以及双对称矩阵 $(Y = Y^T = SYS)$ 与对称次反对称矩

阵 $(Y = Y^T = -SYS)$ 的正交性，可得

$$\begin{aligned}
&\|X - \bar{X}\|^2 \\
&= \Big\|X - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T}{2}\Big\|^2 + \Big\|\frac{\bar{X} - \bar{X}^T}{2}\Big\|^2 \\
&= \Big\|\Big(X - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4}\Big) - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T - S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4}\Big\|^2 + \Big\|\frac{\bar{X} - \bar{X}^T}{2}\Big\|^2 \\
&= \Big\|\Big(X - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4}\Big)\Big\|^2 + \Big\|\frac{\bar{X} + \bar{X}^T - S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4}\Big\|^2 + \Big\|\frac{\bar{X} - \bar{X}^T}{2}\Big\|^2,
\end{aligned}$$

于是，问题2中求 $\hat{X} \in S_E$ 使

$$\|\hat{X} - \bar{X}\| = \min_{X \in S_E} \|X - \bar{X}\|,$$

等价于求 $\hat{X} \in S_E$ 使

$$\Big\|\hat{X} - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4}\Big\| = \min_{X \in S_E} \Big\|X - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4}\Big\|, \tag{11}$$

令

$$\tilde{X} = X - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4}, \quad \tilde{C} = C - \sum_{i=1}^{N} A_i \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4} B_i,$$

当 $X \in S_E$ 时，矩阵方程(3)可写为

$$f(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{N} \big(A_i^T \tilde{C} B_i^T + B_i \tilde{C}^T A_i + S A_i^T \tilde{C} B_i^T S + S B_i \tilde{C}^T A_i S\big), \tag{12}$$

矩阵方程(12)与矩阵方程(3)的差别只是左端矩阵不同。根据式(11)，求解问题2等价于求矩阵方程(12)的极小范数双对称解 $\tilde{X}$。取初始矩阵 $\tilde{X}_0 = f(H)$，其中 H 为 $BSR^{n\times n}$ 中任意矩阵，使用MCG算法可求得矩阵方程(12)的唯一极小范数双对称解 $\tilde{X}^*$，从而得到问题2的解

$$\hat{X} = \tilde{X}^* + \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4}.$$

算例结果表明该MCG算法是有效的。

参考文献：

[1] Chu K W E. Symmetric solution of linear matrix equations matrix decompositions[J]. Linear Algebra Appl, 1989, 119: 35-50

[2] Dai H. On the symmetric solutions of linear equations[J]. Linear Algebra Appl, 1990, 131: 1-7

[3] 彭振赟. 线性矩阵方程 $AXB = C$ 的中心对称解及其最佳逼近[J]. 工程数学学报，2003, 20(6): 15-20
Peng Z Y. The central symmetric solution of the linear matrix equation $AXB = C$ and its optimal approximation[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2003, 20(6): 15-20

[4] 尚丽娜，张凯院，陈梅枝. 求矩阵方程 $AXB = C$ 的双对称最小二乘解的迭代算法[J]. 数值计算与计算机应用，2008, 29(2): 126-135
Shang L N, Zhang K Y, Chen M Z. An iterative method for the least squares symmetric solution of the matrix equation $AXB = C$[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 2008, 29(2): 126-135

[5] 陈梅枝，张凯院，尚丽娜. 求矩阵方程 $AXB = C$ 的中心对称最小二乘解及其最佳逼近的迭代算法[J]. 工程数学学报，2008, 25(6): 1125-1128
Chen M Z, Zhang K Y, Shang L N. An iterative method for the least squares central symmetric solution of the matrix equation $AXB = C$ and its optimal approximation[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(6): 1125-1128
[6] Hou J J, Peng Z Y, Zhang X L. An iterative method for the least squares symmetric solution of matrix equation $AXB = C$[J]. Numer Algor, 2006, 42: 181-192
[7] 程云鹏，张凯院，徐仲. 矩阵论(第3版)[M]. 西安：西北工业大学出版社，2006
Cheng Y P, Zhang K Y, Xu Z. Matrix Theory (the third edition)[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2006

The Modified Conjugate Gradient Method for the Least Squares Bisymmetric Solution of the General Linear Matrix Equation

TIAN Xiao-hong, ZHANG Kai-yuan

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: In this paper, an iterative method is proposed to find the least squares bisymmetric solutions of the general linear matrix equation. This method is obtained through a special transformation and the approximate disposal on the base of conjugate gradient method for solving linear algebraic equations. The convergence of this method is also given. By using this method, a least squares bisymmetric solution can be obtained within the finite iterative steps in the absence of round-off errors, and the solution with least norm can be obtained by choosing a special initial bisymmetric matrix. In addition, its optimal approximation solution to a given matrix can be obtained. Numerical examples show that the iterative method is efficient.

Keywords: bisymmetric matrix; least squares solution; least-norm solution; iterative method; optimal approximation

Received: 10 Nov 2008. **Accepted:** 18 Nov 2009.
Foundation item: The Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2006A05).